Gesamtschule Verl

Jahrgang EF Fach Mathe

Ansprechpartner: Frau Sigge

Thema der Reihe: Vorbereitung auf die Zentrale Klausur am Ende der EF (Funktionen, Differentialrechnung, Funktionsuntersuchung)

<table>
<tr><th>Kompetenzen/Ziele der Reihe</th><th>Materialien</th><th>Arbeitsaufträge/Hinweise</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Prozessbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

• erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle,
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells,
• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation,
• reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen,
• wählen heuristische Hilfsmittel (z.B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen,
• entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege,
• setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
• wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen,
• wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus,
• berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
• interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung,
• stellen Vermutungen auf,
• stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff),
• berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige/hinreichende Bedin- gung, Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
• erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise,
• erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen,
• dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar,
• nutzen Formelsammlungen, Geodreiecke, Zirkel, geometrische Modelle, grafik- fähige Taschenrechner, Tabellenkalkulationen, Funktionenplotter, Dynamische</td>
<td>Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2017

(Woche vom 16.3. – 20.3.)</td>
<td>Aufgabe 1
Aufgabe 3
Hinweis für Teilaufgabe a):
S. 148 Punkt 9 (Substitution bei biquadratischen Gleichungen)
Aufgabe 4</td></tr>
<tr><td>Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2018

(Woche vom 23.3. – 27.3.)</td>
<td>Aufgabe 1
Aufgabe 3
Aufgabe 4</td></tr>
<tr><td>Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2019

(Woche vom 30.3. – 3.4.)</td>
<td>Aufgabe 1
Aufgabe 3
Aufgabe 4 (außer b))
Hinweis: Abbildung 2 zeigt bereits die Ableitungsfunktion (also die Momentangeschwindigkeit)</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Geometrie-Software und gegebenenfalls Computer-Algebra-Systeme, • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen, **Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:** *Die Schülerinnen und Schüler* • wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (Sinusfunktion, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen) an und deuten die zugehörigen Parameter, • berechnen durchschnittliche und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Kontext, • erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate, • deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/Tangentensteigung, • beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion), • leiten Funktionen graphisch ab, • begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mithilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen, • nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten, • wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an, • lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel, • verwenden das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrempunkten, • verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen.		

Sonstiges beigefügtes Material/Anmerkungen:

Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2017

Mathematik

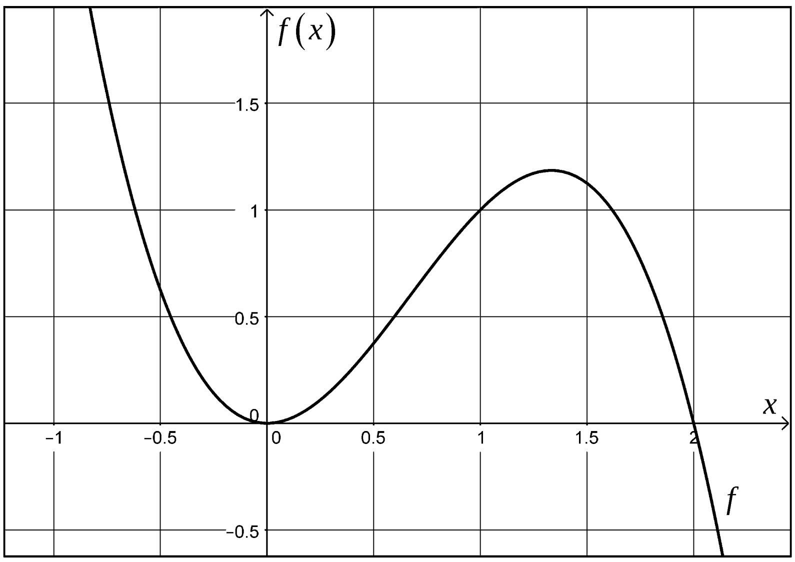
Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -x^3 + 2 \cdot x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Die *Abbildung* zeigt den Graphen von f.



Abbildung

a) *Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt* $P(1|1)$.

(4 Punkte)

b) (1) *Geben Sie die Koordinaten eines Punktes A an, in dem der Graph von f die Steigung Null hat.*

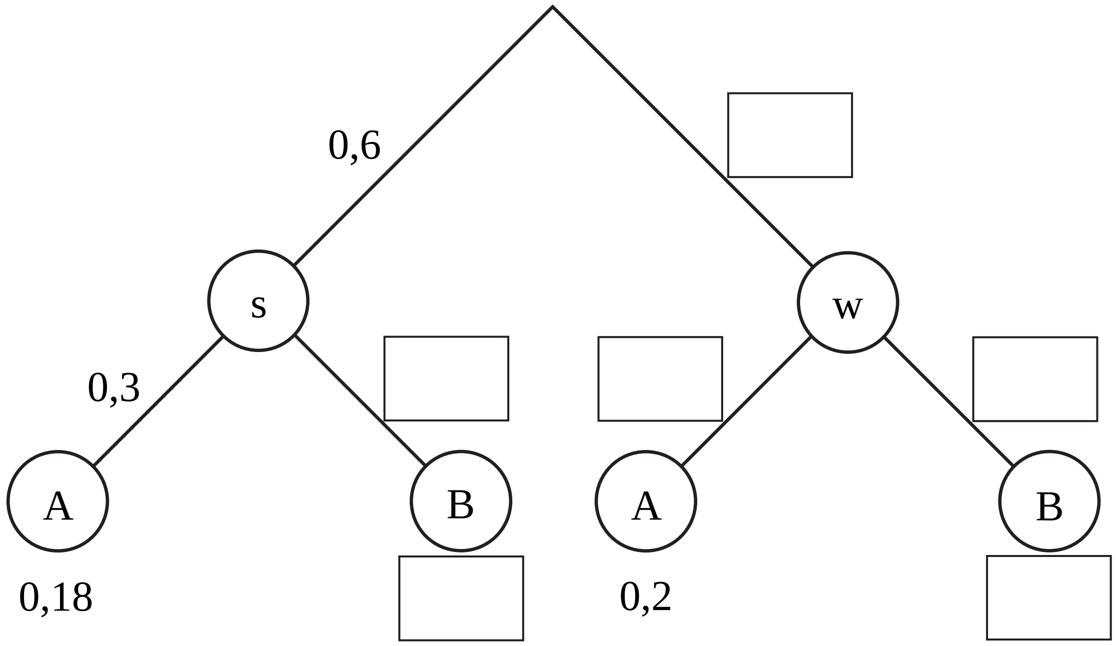
(2) *Geben Sie die Koordinaten eines Punktes* $B(x_B \mid y_B)$ *an, so dass die Ableitung von f an der Stelle* x_B *negativ ist.*

(1 + 1 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 2:

In einer Urne befinden sich schwarze (s) und weiße (w) Kugeln, die zusätzlich entweder mit dem Buchstaben A oder dem Buchstaben B beschriftet sind. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen. Dieses Zufallsexperiment ist in dem folgenden unvollständig beschrifteten *Baumdiagramm* dargestellt.



Baumdiagramm

a) *Ermitteln Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten und geben Sie diese in den Rechtecken im Baumdiagramm an.*

(4 Punkte)

b) Von der gezogenen Kugel wird zunächst nur bekannt gegeben, dass sie mit dem Buchstaben A beschriftet ist.

Stellen Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit auf, dass es sich um eine schwarze Kugel handelt.

[Eine Berechnung der Wahrscheinlichkeit ist nicht erforderlich.]

(2 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2017

Mathematik

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 2,\ x \in \mathbb{R}.$$

a) *Bestimmen Sie (gerundet auf zwei Nachkommastellen) die Nullstellen der Funktion f.*

(3 Punkte)

b) *Zeigen Sie rechnerisch, dass* $x = 2$ *eine lokale Minimalstelle der Funktion f ist.*

(6 Punkte)

c) Ausgehend von der Funktion f ist eine neue Funktion g mit der Gleichung

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \frac{3}{2} \cdot x \\ &= \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + 2,\ x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gegeben. Die *Abbildung 1* auf der folgenden Seite zeigt den Graphen von *f, die Abbildung 2* zeigt den Graphen von *g*.

Nennen Sie zwei Unterschiede der Graphen von f und g.

Name: ____________________

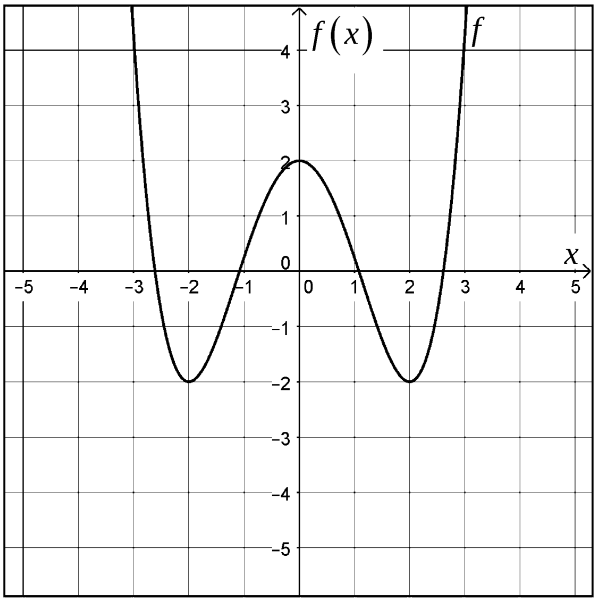


Abbildung 1

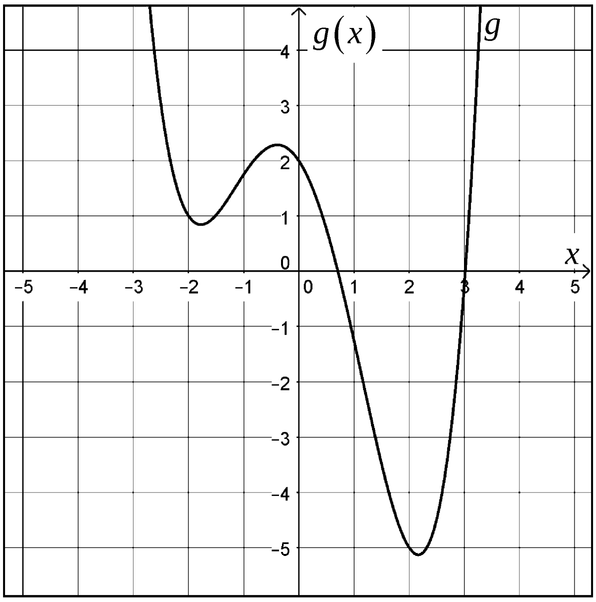


Abbildung 2

(4 Punkte)

d) Die Gerade $t\colon\ y=-\frac{3}{2}\cdot x-2$ ist die Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(-2\,|\,1)$.

[Hinweis: Ein Nachweis, dass t die Tangente an den Graphen von g im Punkt P ist, ist nicht erforderlich.]

(1) *Zeichnen Sie die Tangente t in die Abbildung 2 ein.*

(2) *Zeigen Sie rechnerisch, dass t auch in einem weiteren Punkt Q Tangente an den Graphen von g ist.*

(2 + 6 Punkte)

e) Der Graph von g wird nun um 2 Einheiten nach rechts verschoben. Der verschobene Graph wird anschließend so weit nach unten verschoben, bis die Gerade t in zwei Punkten Tangente an den neuen Graphen ist.

Geben Sie an, um wie viele Einheiten der nach rechts verschobene Graph dazu nach unten verschoben werden muss, und begründen Sie Ihre Angabe.

(3 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 4:

Ausgehend von den Daten aus einer Statistik der Vereinten Nationen kann das Durchschnittsalter der Bevölkerung in einem Land A mit Hilfe der Funktion *a* mit der Gleichung

$$a(t) = -0{,}00011 \cdot t^3 + 0{,}0186 \cdot t^2 - 0{,}538 \cdot t + 24,\ t \in \mathbb{R},$$

modelliert werden.

Dabei ist *t* die Zeit in Jahren seit 1950 und $a(t)$ das zugehörige Durchschnittsalter in Jahren. Mit der Funktion *a* können Prognosen bis zum Jahr 2030 erstellt werden.

Der Graph von *a* ist in *Abbildung 1* dargestellt.

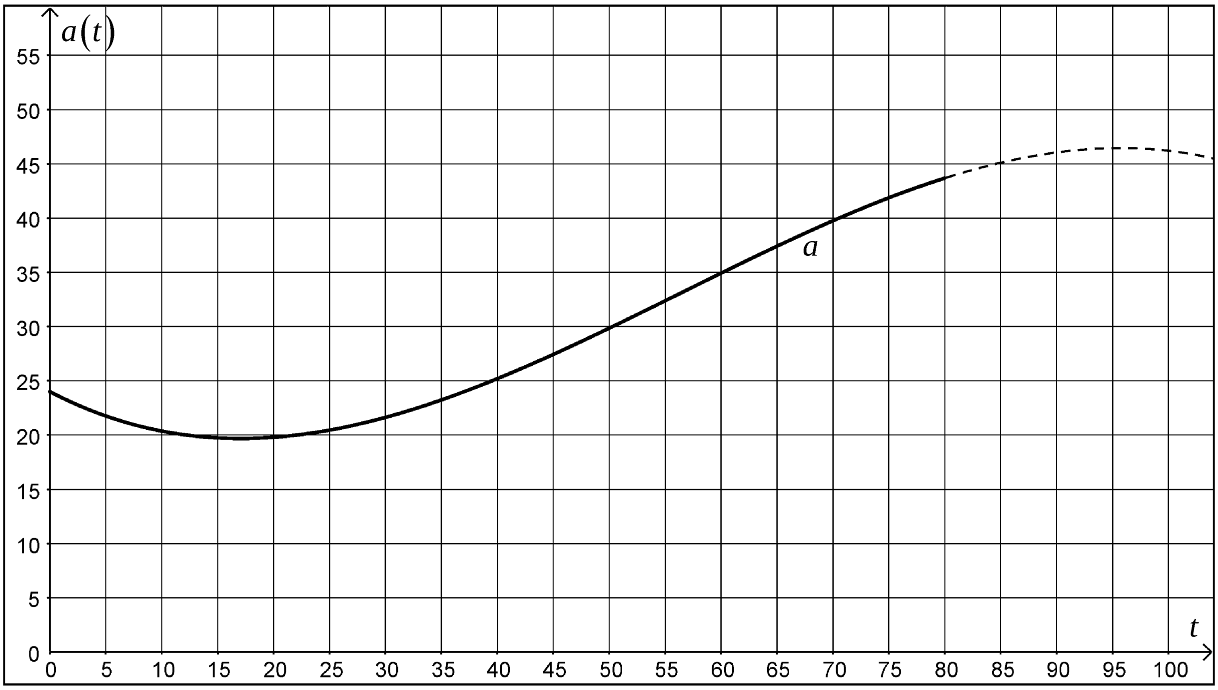


Abbildung 1

a) *Bestimmen Sie das Durchschnittsalter der Bevölkerung für das Jahr* 1950 ($t = 0$) *und den Prognosewert für das Jahr* 2030 ($t = 80$).

(4 Punkte)

b) *Ermitteln Sie rechnerisch das niedrigste Durchschnittsalter der Bevölkerung im Zeitraum von* 1950 *bis* 2030.

(8 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Entwicklung des Durchschnittsalters der Bevölkerung im Zeitraum von 2030 bis 2050 soll durch die Tangente an den Graphen von a an der Stelle $t = 80$ modelliert werden.

Ermitteln Sie in Abbildung 1 zeichnerisch näherungsweise das Durchschnittsalter der Bevölkerung für das Jahr 2050.

(3 Punkte)

d) In einem anderen Land B stimmte für das Jahr 1950 ($t = 0$) das Durchschnittsalter der Bevölkerung nahezu mit dem Durchschnittsalter in dem Land A überein. Die Rate, mit der sich das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land B ändert, ist in der folgenden *Abbildung 2* dargestellt.

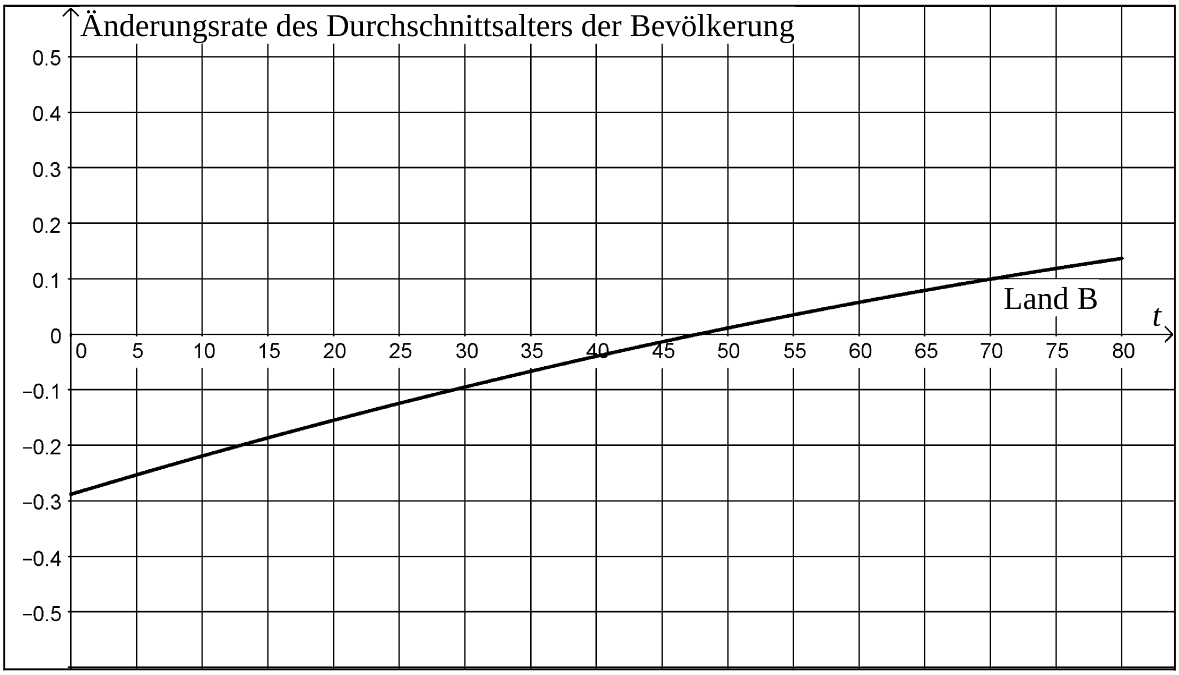


Abbildung 2

(1) *Beurteilen Sie die folgende Aussage:*

Das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land B wächst von 1950 bis 2030 durchgängig.

(2) *Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion a' in die Abbildung 2 ein und geben Sie die Bedeutung von $a'(t)$ im Sachzusammenhang an.*

(3) *Beurteilen Sie die folgende Aussage:*

Im Jahr 2020 wächst das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land A schneller als in dem Land B.

(2 + 5 + 2 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner) oder CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2018

Mathematik

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

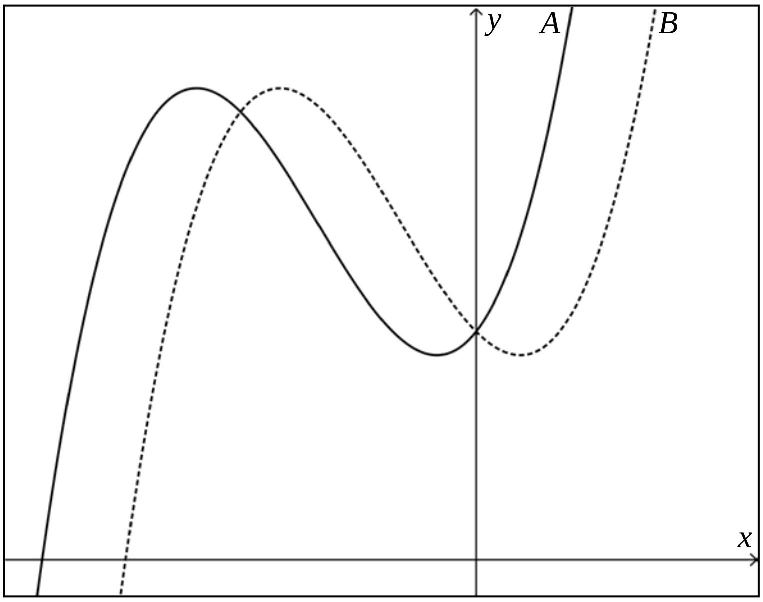
$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 + x^2 - x + 2, \quad x \in IR.$$

a) *Berechnen Sie* $f'(2)$. (3 Punkte)

b) In der *Abbildung* sind zwei Graphen A und B abgebildet, einer davon ist der Graph der Funktion f.

Für die Ableitung der Funktion f an der Stelle 0 gilt: $f'(0) = -1$.

Entscheiden Sie mit Hilfe dieser Eigenschaft begründet, welcher der beiden Graphen der Graph von f ist.



Abbildung

(3 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 2:

In einem Land sind 20 % der Bevölkerung mindestens 65 Jahre alt. Diese Personen werden im Folgenden Senioren genannt. 10 % der Bevölkerung des Landes sind Senioren, die das Internet nutzen. Insgesamt sind 85 % der Bevölkerung des Landes Internetnutzer.

a) *Stellen Sie den oben beschriebenen Sachverhalt dar, indem Sie alle Prozentsätze in der folgenden Tabelle angeben.*

	Nicht-Senioren	Senioren	Summe
Nutzer			
Nicht-Nutzer			
Summe			100 %

Tabelle

(4 Punkte)

b) Eine Person nutzt das Internet.

Stellen Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit auf, dass die Person ein Senior ist.

[Eine Berechnung der Wahrscheinlichkeit ist nicht erforderlich.]

(2 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2018
Mathematik

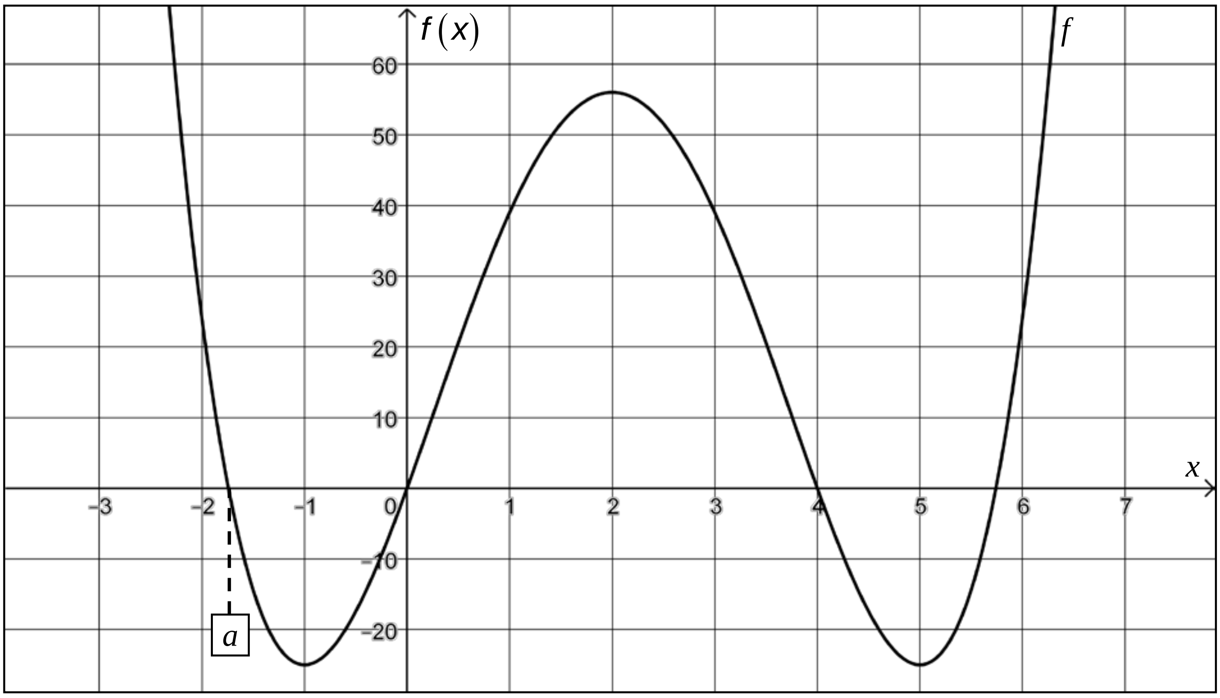
Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = x^4 - 8 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 40 \cdot x, \quad x \in IR.$$

Der Graph der Funktion f ist in der folgenden *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

a) *Ermitteln Sie die in der Abbildung markierte Nullstelle a auf zwei Nachkommastellen genau.*

(2 Punkte)

Name: ____________________

b) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass* $x = 2$ *eine lokale Maximalstelle der Funktion f ist.*

(6 Punkte)

c) (1) *Zeichnen Sie die Sekante* s_1 *durch die Punkte* $H_1(2|56)$ *und* $P_1(4|0)$ *des Graphen von f in die Abbildung ein und berechnen Sie die Steigung von* s_1.

(2) *Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt* $P_1(4|0)$.

[Zur Kontrolle: Die Steigung von *t* ist $m_t = -40$.]

(3) *Zeichnen Sie die Tangente t in die Abbildung ein.*

(4) Die Steigung einer Sekante s_2 durch den Punkt $P_1(4|0)$ und einen weiteren Punkt P_2 des Graphen von *f* soll sich um weniger als 0,1 von der Steigung der Tangente *t* unterscheiden.

Ermitteln Sie durch systematisches Probieren die Koordinaten eines Punktes P_2 *so, dass diese Bedingung erfüllt ist.*

(3 + 4 + 2 + 3 Punkte)

d) Der Graph der Funktion *f* wird nacheinander folgenden Transformationen unterzogen:

- Der Graph wird in Richtung der *y*-Achse so gestaucht, dass der gestauchte Graph den lokalen Hochpunkt $H_2(2|28)$ besitzt.
- Im Anschluss wird der gestauchte Graph um drei Einheiten nach rechts verschoben.

Die Funktion, die zum so veränderten Graphen gehört, wird mit *g* bezeichnet.

Geben Sie eine Gleichung von g an.

[Hinweis: Eine Vereinfachung der Gleichung von *g* ist nicht erforderlich.]

(4 Punkte)

Name: ______________________

Aufgabe 4:

Aufgrund ergiebiger Regenfälle wurde in der zweiten Oktoberhälfte 2016 am Rhein ein Ansteigen des Wassers beobachtet.

Am 20.10.2016 um 0:00 Uhr wurde an der Messstelle in Bonn ein Wasserstand[1] von 130 cm gemessen. Das Wasser begann dann zu steigen und nach einiger Zeit zunächst wieder zu sinken.

Abbildung 1

Eine Schülerin verwendet die auf $I\!R$ definierte Funktion *h* mit der Funktionsgleichung

$$h(t) = -\frac{80}{27}\cdot t^3 + \frac{40}{3}\cdot t^2 + 130$$

für $0 \le t \le 3{,}5$, um den Wasserstand des Rheins an der Messstelle in Bonn im Zeitraum vom 20.10.2016, 0:00 Uhr, bis zum 23.10.2016, 12:00 Uhr zu modellieren.

Dabei entspricht z. B. $t = 0$ der Zeit 0:00 Uhr am 20.10.2016, $t = 1$ der Zeit 0:00 Uhr am 21.10.2016 und $t = 3{,}5$ der Zeit 12:00 Uhr am 23.10.2016. $h(t)$ ist der Wasserstand des Rheins an der Messstelle in Bonn in cm.

Der Graph von *h* ist in der *Abbildung 2* dargestellt.

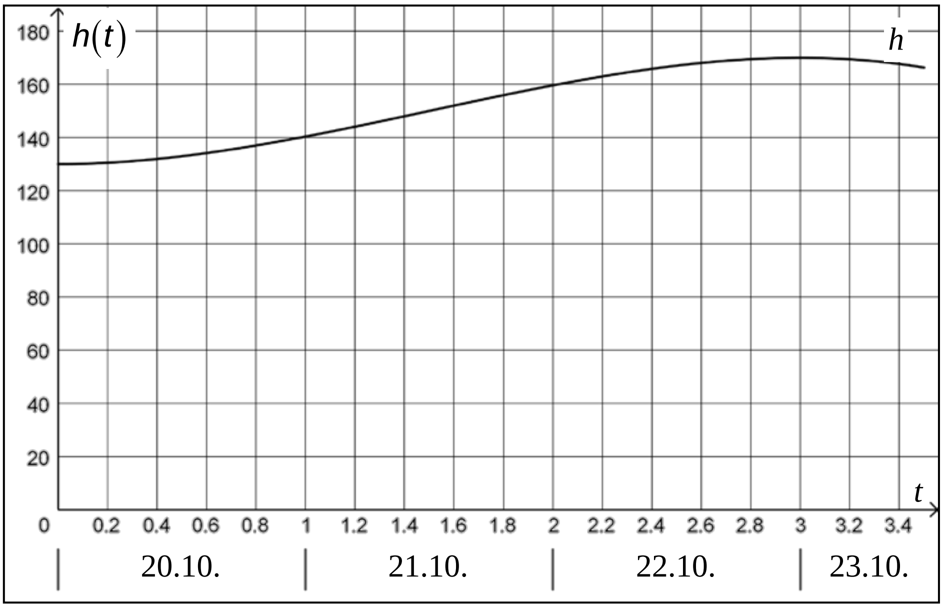


Abbildung 2

Mit der Funktion *h* ist es möglich, die Aufgaben a) bis d) zu bearbeiten.

---

[1] Der Wasserstand ist die Höhe des Wassers an einer Messlatte (Pegel – siehe *Abbildung 1*) und entspricht nicht der Wassertiefe des Flusses.

Name: ____________________

a) *Berechnen Sie den Wasserstand des Rheins an der Messstelle in Bonn am* 21.10.2016 *um* 12:00 *Uhr.*

(3 Punkte)

b) *Berechnen Sie* $\frac{h(3)-h(1)}{2}$ *und interpretieren Sie den berechneten Wert im Sachzusammenhang.*

(4 Punkte)

c) *Ermitteln Sie rechnerisch den niedrigsten und höchsten Wasserstand im betrachteten Zeitraum.*

(9 Punkte)

d) *Bestimmen Sie rechnerisch, wie lange der Wasserstand im betrachteten Zeitraum zwischen* 140 *cm und* 150 *cm lag.*

(4 Punkte)

In der folgenden Aufgabe e) wird der Wasserstand in einem über den 23.10.2016 hinausgehenden Zeitraum betrachtet.

Name: ____________________

e) In der folgenden *Abbildung 3* ist der Wasserstand im Zeitraum vom 20.10.2016, 0:00 Uhr ($t = 0$), bis zum 23.10.2016, 12:00 Uhr ($t = 3{,}5$), in einem erweiterten Koordinatensystem dargestellt.

Die *Abbildung 4* zeigt die momentane Änderungsrate des Wasserstandes im verlängerten Zeitraum vom 20.10.2016, 0:00 Uhr, bis zum 28.10.2016, 12:00 Uhr ($t = 8{,}5$).

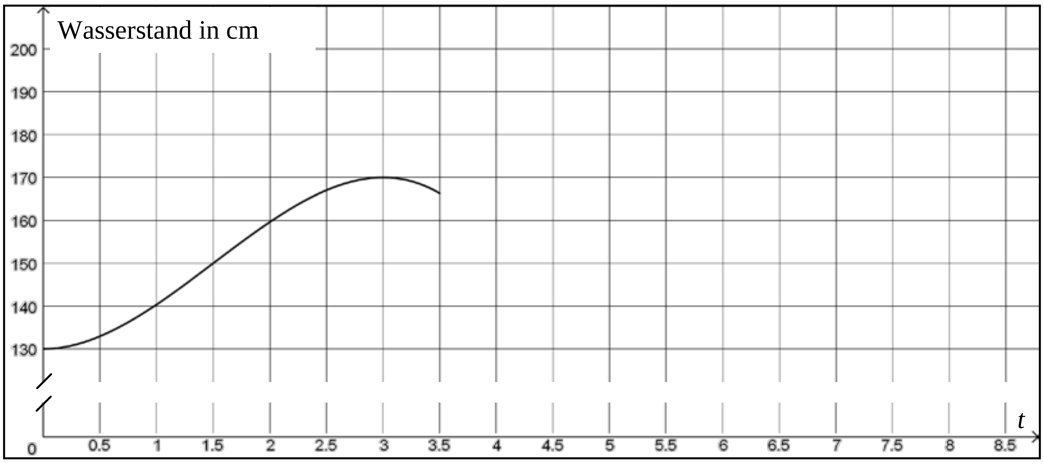


Abbildung 3

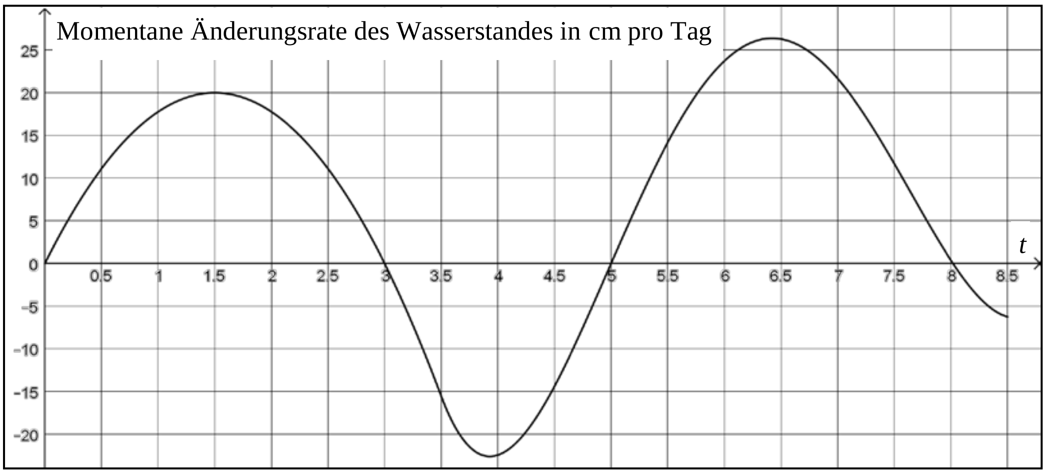


Abbildung 4

Skizzieren Sie, passend zu der in Abbildung 4 gegebenen momentanen Änderungsrate, in Abbildung 3 den weiteren Verlauf des Wasserstandes bis zum 28.10.2016, 12:00 *Uhr.*

(4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner) oder CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	gibt den Faktor $\frac{1}{2}$ an.	2	
2	gibt eine Gleichung von g an.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe d)	**4**	

	Summe Aufgabe 3	**24**	

Aufgabe 4:

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	berechnet den Wasserstand des Rheins an der Messstelle in Bonn am 21.10.2016 um 12:00 Uhr.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe a)	**3**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	berechnet $\frac{h(3)-h(1)}{2}$ und interpretiert den berechneten Wert im Sachzusammenhang.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe b)	**4**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	gibt $h'(t)$ an.	2	
2	ermittelt mit einer notwendigen Bedingung die möglichen lokalen Extremstellen der Funktion *h*.	2	
3	ermittelt rechnerisch den niedrigsten und höchsten Wasserstand im betrachteten Zeitraum.	5	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe c)	**9**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	bestimmt rechnerisch, wie lange der Wasserstand im betrachteten Zeitraum zwischen 140 cm und 150 cm lag.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe d)	**4**	

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	skizziert, passend zu der in *Abbildung 4* gegebenen momentanen Änderungsrate, in *Abbildung 3* den weiteren Verlauf des Wasserstandes bis zum 28.10.2016, 12:00 Uhr.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe e)	**4**	

	Summe Aufgabe 4	**24**	

Festlegung der Gesamtnote

	Lösungsqualität	
	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
Übertrag der Punktsumme aus der ersten Aufgabe	**6**	
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten Aufgabe	**6**	
Übertrag der Punktsumme aus der dritten Aufgabe	**24**	
Übertrag der Punktsumme aus der vierten Aufgabe	**24**	
Gesamtpunktzahl	**60**	

Note

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Noten zu den Punktsummen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Erreichte Punktsummen
sehr gut	52 – 60
gut	43 – 51
befriedigend	34 – 42
ausreichend	25 – 33
mangelhaft	13 – 24
ungenügend	0 – 12

Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2019

Mathematik

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -x^3 + 0{,}5 \cdot x^2 - 2 \cdot x,\ x \in \mathbb{R}.$$

(1) *Berechnen Sie* $f'(1)$.

(3 Punkte)

(2) *Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt* $P(1 | f(1))$.

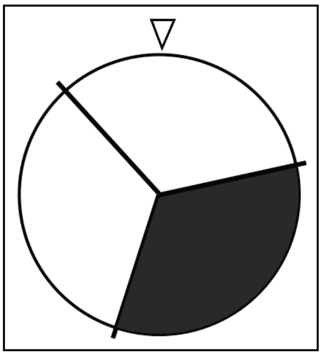
(3 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 2:

Bei einem Spiel wird das Glücksrad aus der *Abbildung* zweimal gedreht. Der Einsatz für das zweimalige Drehen beträgt 1 €.

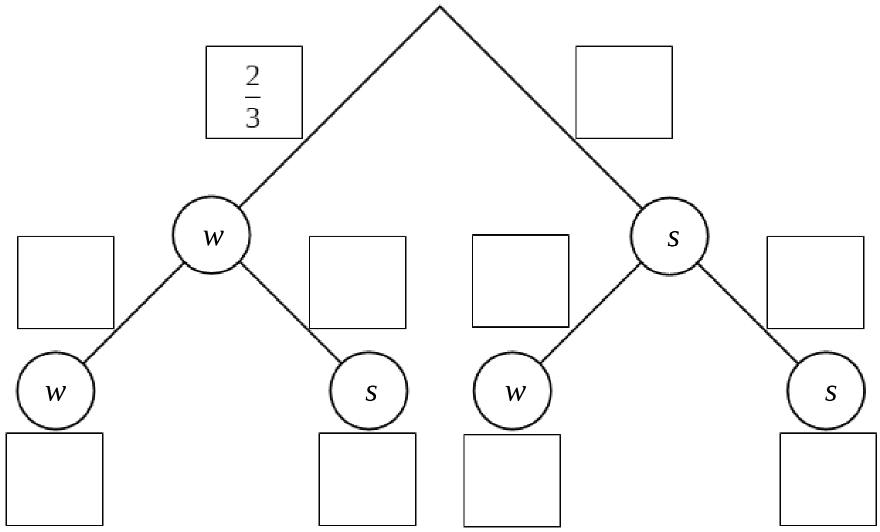
- Erscheint zweimal das schwarze Feld, so bekommt man den Einsatz zurück und weitere 4 € ausgezahlt.
- Erscheint zweimal ein weißes Feld, so wird nur der Einsatz zurückgezahlt.
- Andernfalls verliert man den Einsatz.



Abbildung

(1) *Geben Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in den Kästchen des folgenden Baumdiagrammes an.*

Geben Sie die fehlenden Gewinne/Verluste auf den Linien unter dem Baumdiagramm an.



Gewinn/
Verlust .... **-1 €** ....

(3 Punkte)

(2) Ein Spiel ist „fair“, wenn ein Spieler auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust macht.

Untersuchen Sie, ob das Spiel fair ist.

(3 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2019

Mathematik

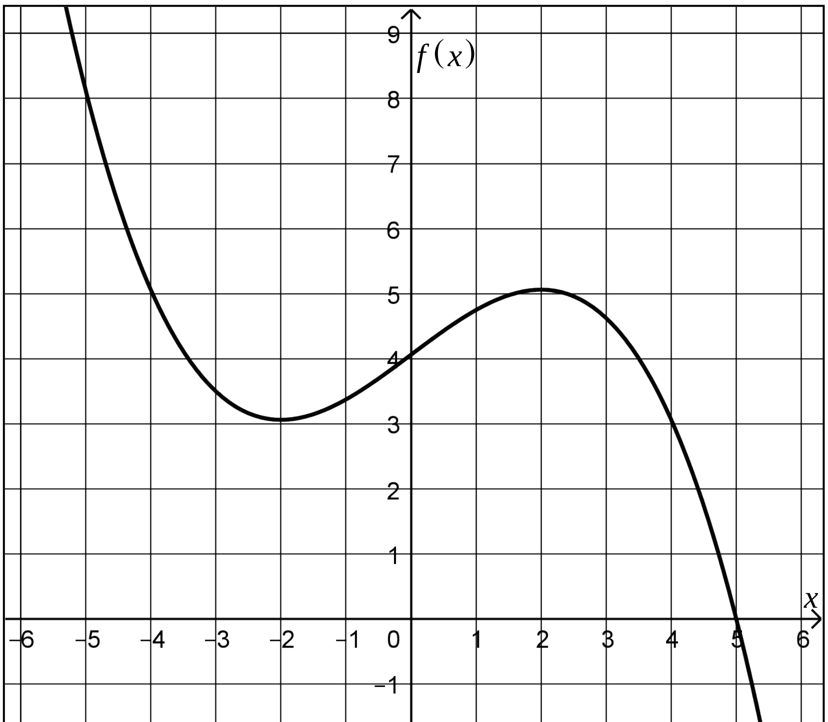
Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x + \frac{65}{16},\ x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph der Funktion f ist in der folgenden *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

Name: ____________________

a) *Geben Sie die exakten Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von f mit der y-Achse an.*

(2 Punkte)

b) *Bestimmen Sie rechnerisch die lokalen Extremstellen von f.*

(7 Punkte)

c) Die Sekante s verläuft durch den Tiefpunkt $T\left(-2\,|\,\frac{49}{16}\right)$ und den Hochpunkt $H\left(2\,|\,\frac{81}{16}\right)$ des Graphen von f.

(1) *Zeichnen Sie die Sekante s in die Abbildung ein und bestimmen Sie rechnerisch die Steigung von s.*

(2) Im Bereich von $x=-2$ bis $x=2$ gibt es Stellen, an denen die Tangente an den Graphen von f eine größere Steigung besitzt als die Sekante s.

Geben Sie eine solche Stelle an und begründen Sie Ihre Angabe mithilfe einer Rechnung.

(3 + 3 Punkte)

d) Der Graph von f wird so in Richtung der y-Achse verschoben, dass der verschobene Graph genau zwei Nullstellen besitzt.

Geben Sie alle Möglichkeiten einer solchen Verschiebung an.

(3 Punkte)

e) Die Funktion f ist die Ableitungsfunktion einer Funktion g.

Entscheiden Sie begründet, z. B. mithilfe des Graphen von f, für jede der beiden folgenden Aussagen (A) *und* (B), *ob sie wahr oder falsch ist.*

(A) Der Graph von g steigt im gesamten Bereich von $x=-4$ bis $x=0$.

(B) Der Graph von g besitzt an der Stelle $x=5$ einen lokalen Hochpunkt.

(3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 4:

Der US-Amerikaner Carl Lewis gehört zu den erfolgreichsten Leichtathleten der Sportgeschichte. Einen seiner acht Weltmeistertitel hat er bei den Leichtathletik-Weltmeisterschaften 1991 im 100 m-Lauf gewonnen.

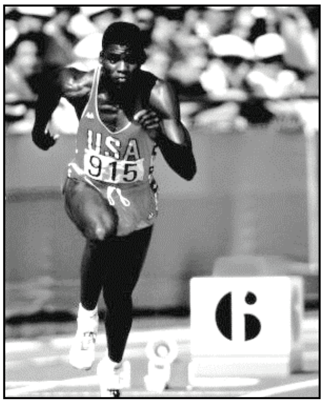


Abbildung 1

In dieser Aufgabe wird eine 70 m lange Teilstrecke seines Finallaufes betrachtet. Für diese Teilstrecke wird die Momentangeschwindigkeit in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke durch die Funktion v mit

$$v(x) = -0{,}0061 \cdot x^4 + 0{,}1475 \cdot x^3 - 1{,}348 \cdot x^2 + 5{,}65 \cdot x + 2{,}6\ ,\ x \in \mathbb{R},$$

modelliert.

Dabei ist x die zurückgelegte Strecke in der Einheit 10 m (d. h. $x = 2$ entspricht 20 m, $x = 3$ entspricht 30 m usw.). $v(x)$ ist die zugehörige Momentangeschwindigkeit in m/s.

Für $2 \le x \le 9$ beschreibt diese Funktion näherungsweise die Momentangeschwindigkeit von Carl Lewis von der 20 m-Markierung bis zur 90 m-Markierung.

Der Graph von v ist in der *Abbildung 2* dargestellt.

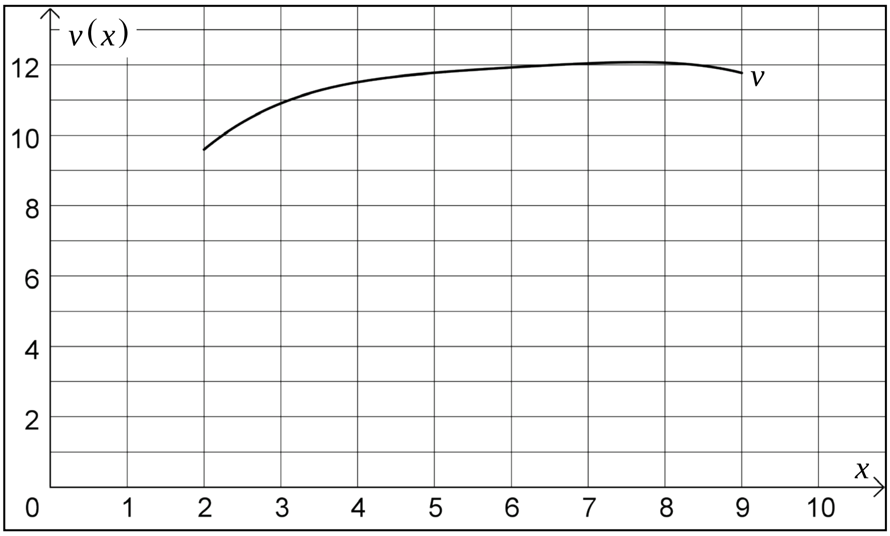


Abbildung 2

Die folgenden Teilaufgaben beziehen sich auf die durch die Funktion v modellierte Momentangeschwindigkeit.

Abbildung 1 CC0 1.0

Name: ____________________

a) *Bestimmen Sie die Momentangeschwindigkeit von Carl Lewis an der* 50 m-*Markierung auf zwei Nachkommastellen genau.*

[Zur Kontrolle: Der auf eine Nachkommastelle gerundete Wert beträgt 11,8 m/s.]

(2 Punkte)

b) Carl Lewis hat seine maximale Geschwindigkeit in dem Finallauf zwischen der 20 m-Markierung und der 90 m-Markierung erreicht.

Bestimmen Sie rechnerisch diese maximale Geschwindigkeit.

(9 Punkte)

c) (1) Carl Lewis hat in seinem Finallauf für die 100 m-Strecke vom Start bis zum Ziel 9,86 s benötigt.

Weisen Sie nach, dass seine Durchschnittsgeschwindigkeit bei diesem Lauf ca. 10,14 m/s *betragen hat.*

(2) *Ermitteln Sie mithilfe der Funktion v, nach welcher zurückgelegten Strecke die Momentangeschwindigkeit von Carl Lewis genauso groß wie seine Durchschnittsgeschwindigkeit gewesen ist.*

(2 + 3 Punkte)

d) In der nebenstehenden *Abbildung 3* sehen Sie das Zeit-Weg-Diagramm einer Bewegung. Die t-Werte geben die Zeit in Sekunden und die y-Werte die in dieser Zeit zurückgelegte Strecke in m an.

Zusätzlich ist die Tangente an den Graphen an der Stelle $t = 8$ dargestellt.

(1) *Bestimmen Sie näherungsweise die Steigung dieser Tangente.*

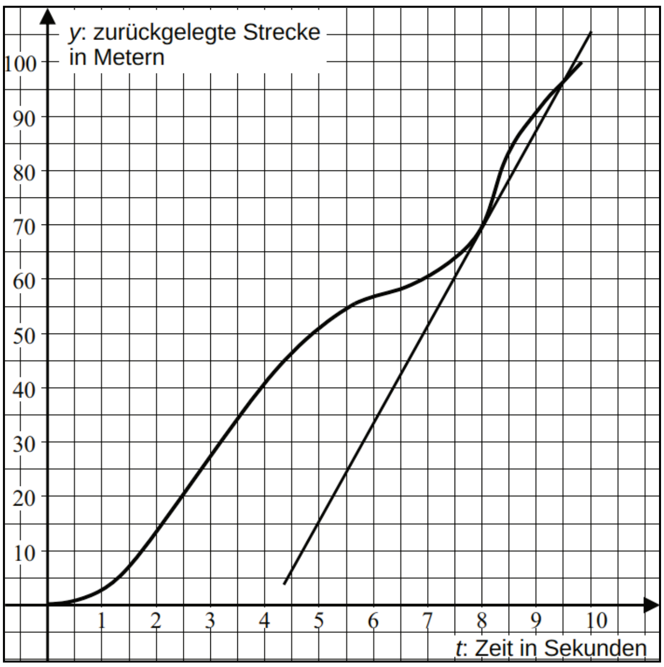


Abbildung 3

Name: ____________________

(2) *Entscheiden Sie begründet, ob es sich bei dem Diagramm aus Abbildung 3 um das Zeit-Weg-Diagramm des Finallaufes von Carl Lewis handeln kann.*

(2 + 2 Punkte)

e) Die Funktion v soll zu einer Funktion v_{neu} transformiert werden, so dass eine Strecke von 20 Metern nicht mehr durch $x = 2$, sondern durch $x = 20$, eine Strecke von 30 Metern nicht durch $x = 3$, sondern durch $x = 30$ usw. festgelegt wird. $v_{neu}(x)$ ist wieder die zugehörige Momentangeschwindigkeit von Carl Lewis in m/s.

(1) *Geben Sie an, durch welche Transformation der Graph der Funktion v in den Graphen der Funktion v_{neu} überführt wird.*

(2) Die Funktion v_{neu} wird durch eine der folgenden Gleichungen beschrieben.

Geben Sie an, welche der Gleichungen die Funktion v_{neu} beschreibt.

(A) $v_{neu}(x) = 10 \cdot v(x)$ (B) $v_{neu}(x) = v(10 \cdot x)$

(C) $v_{neu}(x) = v(0,1 \cdot x)$ (D) $v_{neu}(x) = v(x - 10)$

(2 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner) oder CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung